Теорема. *Пусть последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность. Тогда праведливы равенства*

$$\bar{n}_0(\Lambda) = \lim_{\delta\to+0} \bar{L}(\Lambda,\delta) = \sup_{\delta\in(0;1)} \bar{L}(\Lambda,\delta).$$

Литература

1. Polya G. *Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen* // Math. Zeitschr. – 1929. – V. 29. – P. 549-640.

2. Koosis P. *The logarithmic integral I.* – Cambridge University Press, 1997. – P. 625.

3. Rubel L. A. *Necessary and sufficient conditions for Carlson's theorem on entire functions* // Trans. Amer. math. Soc. – 1956. – T. 83. – p. 4I7-429.

4. Malliaven P., Rubel L. A. *On small entire functions of exponential type with given zeros.* // Bull. Soc. Math. France. – 1961. – T. 89 – p. 175-201.

ON MAXIMAL DENSITY OF NUMBERS SEQUENCE

A.F. Kuzhaev

In this work we announce relations between different densities of a positive sequence and variables related to them. Namely, given the formula for calculating the maximal density of the positive sequence.
Keywords: sequence of positive numbers, maximal density, upper density.

УДК 517.98

C^*-АЛГЕБРА, ПОРОЖДЕННАЯ ОТОБРАЖЕНИЕМ, КОТОРОЕ ИНДУЦИРУЕТ ИНВЕРСНУЮ ПОЛУГРУППУ

А.Ю. Кузнецова[1]

1 *alla/kuznetsova@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В статье рассматриваются C^*-алгебры, порожденные отображениями специального вида. Заданное на счетном множестве отображение индуцирует семейство операторов частичной изометрии, порождающее исследуемую алгебру. В работе приводятся условия, при которых это семейство мультипликативно порождает инверсную полугруппу, и изучаются соответствующие алгебры.

Ключевые слова: C^*-алгебра, инверсная полугруппа, инвариантное подпространство, оператор обобщенного сдвига, алгебра Теплица.

Пусть $\varphi : X \longrightarrow X$ отображение счетного множества X в себя, удовлетворяющее условию $\operatorname{card}\varphi^{-1}[x] < \infty$ для любого $x \in X$. С парой (X,φ) связан граф (X,φ) с вершинами в точках множества X и ребрами $(x,\varphi(x))$. C^*-алгебра $C^*_\varphi(X)$, порожденная отображением φ, ассоциирована с данным графом. Конструкция $C^*_\varphi(X)$ была предложена в [1]. Мы предполагаем, что граф (X,φ) является связным. Кроме того, считаем, что $\varphi^n(x) \neq x$ ни при каких $n \in \mathbb{N}$ и $x \in X$.

Заданное на X отображение индуцирует на нем частичный порядок (φ-порядок) и отношение φ-эквивалентности.

Скажем, что $x \prec y$, если найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $\varphi^n(y) = x$.

Скажем, что элементы x и y n-эквивалентны, $x \overset{n}{\sim} y$, если $\varphi^n(x) = \varphi^n(y)$, и φ-эквивалентны, $x \overset{\varphi}{\sim} y$, если они n-эквивалентны для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Семейство функций $\{e_x\}_{x\in X}$, где $e_x(y) = \delta_{x,y}$ ($\delta_{x,y}$ — символ Кронекера), образует естественный ортонормированный базис в $l^2(X)$. На базисные векторы можно распространить отношения φ-порядка и φ-эквивалентности, отождествляя элемент базиса e_x с соответствующим элементом $x \in X$.

Отображение φ индуцирует замыкаемый оператор

$$T_\varphi : l^2(X) \longrightarrow l^2(X); \quad T_\varphi f = f \circ \varphi,$$

с которым связано семейство операторов частичной изометрии $\mathscr{U} = \{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$,

$$T_\varphi = U_1 + \sqrt{2}U_2 + \ldots + \sqrt{m}U_m + \ldots,$$

где U_k частичная изометрия с начальным пространством $l^2(X_k) = \{f \in l^2(X) : T_\varphi^* T_\varphi f = kf\}$ и конечным $l_k^2 = \{f \in l^2(X) : T_\varphi T_\varphi^* f = kf\}$.

Под *алгеброй, порожденной отображением* φ, понимается операторная алгебра $C_\varphi^*(X)$, порожденная указанным семейством частичных изометрий.

Семейства $\mathscr{U}$ и $\mathscr{U}^*$ мультипликативно порождают инволютивную полугруппу $\mathrm{Mon}(X)$, элементы которой назовем мономами. Очевидно, что линейные комбинации мономов плотны в $C_\varphi^*(X)$. В [2] приведен критерий неприводимости $C_\varphi^*(X)$.

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны:*

1) $C_\varphi^*(X)$ *неприводима на* $l^2(X)$*;*

2) *из равенства* $(We_x, e_x) = (We_y, e_y)$ *для любого* $W \in \mathrm{Mon}(X)$ *следует* $e_x = e_y$.

Данный критерий позволяет ввести на базисных векторах еще одно отношение эквивалентности. Скажем, что базисные векторы e_x и e_y являются ω-эквивалентными, $e_x \overset{\omega}{\sim} e_y$, если для любого $W \in \mathrm{Mon}(X)$ выполняется $(We_x, e_x) = (We_y, e_y)$. Нетрудно проверить, что ω действительно является отношением эквивалентности и разбивает множество $\{e_x\}_{x\in X}$ на непересекающиеся классы. Пусть $J_{x_0} = \{e_x : e_x \overset{\omega}{\sim} e_{x_0}\}$ — класс эквивалентности базисного вектора e_{x_0}.

Нас интересует, когда полугруппа $\mathrm{Mon}(X)$ является инверсной, то есть состоит только из частичных изометрий. Подробно об инверсных полугруппах и связанных с ними алгебраических конструкциях см. в [3], [4].

Теорема 2. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *Полугруппа* $\mathrm{Mon}(X)$ *является инверсной.*

2) *Из условия* $e_x \overset{\varphi}{\sim} e_y$ *следует* $e_x \overset{\omega}{\sim} e_y$.

Предыдущую теорему можно сформулировать и следующим образом:

Для того чтобы полугруппа $\mathrm{Mon}(X)$ *была инверсной, необходимо и достаточно, чтобы для любых двух* φ*-эквивалентных элементов* x *и* y *существовало взаимно однозначное отображение* $\chi : X \longrightarrow X$ *такое, что* $\chi \circ \varphi = \varphi \circ \chi$ *и* $\chi(x) = y$.

Предположим, что множество $\mathscr{U}$ является ручным, то есть совместно с $\mathscr{U}^*$ порождает инверсную полугруппу.

Зададим на мономах следующее действие единичной окружности

$$\alpha : S^1 \longrightarrow \mathrm{Aut}\, C^*_\varphi(X); \quad \alpha(z)V = z^{\mathrm{ind} V} V,\ V \in \mathrm{Mon}(X)$$

и продолжим по непрерывности. Обозначим через $C_{\varphi,0}$, неподвижную подалгебру относительно действия окружности α.

Следствие. *Подалгебра* $C_{\varphi,0}$ *коммутативна тогда и только тогда, когда* $\mathscr{U}$ *порождает инверсную полугруппу.*

Заметим, что $C_{\varphi,0}$ является AF-алгеброй. Если $\mathscr{U}$ — ручное множество, то $C_{\varphi,0}$ порождается подполугруппой идемпотентов $\mathrm{Mon}(X)$.

Множество X назовем φ-ручным, если соответствующее семейство частичных изометрий $\mathscr{U}$ является ручным. Пусть $\mathscr{E}(x) = \{y \in X : x \prec y\}$, and $\mathfrak{E}(x) = \{y \in X : x \overset{\varphi}{\sim} y\}$.

Предложение. *Пусть* X — φ*-ручное множество. Пусть найдется хотя бы один* $x \in X$*, такой, что множество* $\mathfrak{E}(x)$ *конечное. Тогда* $\mathfrak{E}(x)$ *является конечным множеством для любого* $x \in X$ *и* $J_x = \{e_y : y \in \mathfrak{E}(x)\}$.

Если X является φ-ручным множеством, то можно полностью описать инвариантные подпространства для $C^*_\varphi(X)$ и структуру алгебры.

Теорема 3.

Пусть X — φ*-ручное множество и* φ *не сюръективно. Пусть* $\mathfrak{E}(x)$ — *счетное множество для всех* $x \in X$*. Тогда*

1) $l^2(X) \simeq \bigoplus\limits_{n=1}^{+\infty} \big(\bigoplus\limits_{i \in I_n} H_i \big)$, *где* I_n *счетно;*
2) *подпространства* H_i *являются конечномерными и изоморфными при фиксированном* n*;*
3) $C^*_\varphi(X)$ *изоморфна некоторой подалгебре* $\bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} M_{n_k}(\mathbb{C})$.

Теорема 4. *Пусть* X — φ*-ручное множество и* φ *не сюръективно. Пусть* $\mathfrak{E}(x)$ — *конечное множество для всех* $x \in X$*. Тогда*

1) $l^2(X) \simeq l^2(\mathbb{Z}_+) \oplus \Big(\bigoplus\limits_{\mathrm{fin}} \big(\bigoplus\limits_{i \in I_n} H_i \big) \Big)$, *где* I_n *конечно;*
2) *подпространства* H_i *являются конечномерными и изоморфными при фиксированном* n*;*
3) $C^*_\varphi(X)$ *изоморфна прямой сумме* $\mathscr{T} \oplus \big(\bigoplus\limits_{k} M_{n_k} \big)$, *где* $\mathscr{T}$ — *алгебра Теплица.*

Теорема 5. *Пусть* X — φ*-ручное множество и* φ *сюръекция. Пусть* $\mathfrak{E}(x)$ — *счетное множество для всех* $x \in X$*. Тогда*

1) $l^2(X) \simeq \bigoplus_{n=-\infty}^{+\infty} \Big(\bigoplus_{i \in I_n} H_i \Big)$, *где* I_n *счетно;*

2) *каждое* $H_i \simeq l^2(\mathbb{Z}_+)$;

3) *Сужение* $C^*_\varphi(X)$ *на* H_i *изоморфно* C^**-алгебре, порожденной оператором обобщенного сдвига, причем коэффициенты операторов для различных подпространств связаны друг с другом. Если* $H_{(n)}$ $(H_{(m)})$ *слагаемое в* $\bigoplus_{i \in I_n} H_i$ *(соотв.* $\bigoplus_{i \in I_m} H_i$*),* $n > m$, *тогда соответствующие операторы обобщенного сдвига имеют коэффициенты* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ *и* $(\beta_1, \ldots, \beta_{n-m}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots)$.

Теорема 6. *Пусть* X *—* φ*-ручное множество и* φ *сюръекция. Пусть* $\mathfrak{E}(x)$ *— конечное множество для всех* $x \in X$. *Тогда*

1) $l^2(X) \simeq l^2(\mathbb{Z}) \oplus \Big(\bigoplus_{n=0}^{\infty} \Big(\bigoplus_{i \in I_n} H_i \Big) \Big)$, *где* I_n *конечно;*

2) *каждое* $H_i \simeq l^2(\mathbb{Z}_+)$;

3) *Сужение* $C^*_\varphi(X)$ *на* H_i *описывается пунктом 3) теоремы 5. Сужение* $C^*_\varphi(X)$ *на* $l^2(\mathbb{Z})$ *изоморфно* C^**-алгебре, порожденной двусторонним оператором обобщенного сдвига.*

Литература

1. Григорян С. А., Кузнецова А. Ю. *C^*-алгебры, порожденные отображениями* // Мат. Заметки. – 2010. – Т. 87. – № 5. – С. 694–703.

2. Григорян С. А., Кузнецова А. Ю. *C^*-алгебры, порожденные отображениями. Критерий неприводимости* // Известия вузов. Матем., в печати.

3. Exel R. *Inverse semigroups and combinatorial C^*-algebras* // Bull. Bras. Math. Soc. (N.S.) – 2008. – V. 39. – № 2. – P. 191–313.

4. Paterson A. *Groupoids, inverse semigroups, and there operator algebras.* – Boston-Basel-Berlin: Birkhauser, 1999. – 275 p.

C^*-ALGEBRA GENERATED BY A MAPPING THAT INDUCES THE INVERSE SEMIGROUP

A.Yu. Kuznetsova

We consider C^*-algebras generated by mappings of special kind. A given mapping on a countable set induces a family of partial isometries which generates the algebra. We give conditions for ensuring that the family multiplicatively generates an inverse semigroup and study the corresponding C^*-algebras.

Keywords: C^*-algebra, inverse semigroup, invariant subspace, weighted shift operator, Toeplitz algebra.